

دانشگاه محقق اردبیلی
دانشکده علوم

سئوالات پایان ترم معادلات دیفرانسیل
رشته ریاضی

زمان: 140 دقیقه
تاریخ امتحان: 80/11/7

نام خانوادگی:
شماره دانشجویی:

توجه: جواب سئوالات را با دقت و کامل بنویسید.

مسئله 1:

الف) فرض کنید که معادله کمکی $L[y] = 0$ دارای ریشه های زیر باشد :
 $1, -2, -3, -3, 4, 4, 4, -2+3i, -2+3i, 3+4i, 3-4i, 3+4i, 3-4i, 3+4i, 3-4i$
در این صورت جواب عمومی $y(x)$ معادله $L[y] = 0$ در $I: -\infty < x < \infty$ را به دست آورید.

ب) معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + xy' - 2iy = 0$ را حل کنید.

مسئله 2:

برای معادله دیفرانسیل $ay'' + by' + cy = 0$ (a, b, c is constant) شرط کامل بودن را به دست آورده سپس معادله $(x^2 + 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$ را حل کنید.

مسئله 3:

قضیه:

اگر توابع p, q و g در فاصله باز I پیوسته و $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب مستقل خطی معادله دیفرانسیل $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد در این صورت جواب خصوصی معادله ناهمگن

$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ به صورت

$$Y(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$
 بوده و جواب عمومی به فرم $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x)$ می باشد.

مسئله 4:

الف) ثابت کنید $L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$ که T دوره تناوب f است $[f(x+T) = f(x)]$.

ب) اگر $w(t) = x(t) * y(t)$ و $w(t) = \frac{t}{2} \sin t$ و $x(t) = \sin t$ مطلوب است محاسبه $y(t)$.

مسئله 5:

معادله دیفرانسیل $x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0$ را در نظر گرفته
اولاً: نقاط ایزوله را به دست آورده نشان دهید که منظم هستند
ثانیاً: $F(r)$ (معادله شاخص) را به دست آورید.
ثالثاً: دو جواب مستقل خطی در همسایگی $x=0$ را به دست آورید.

مسئله 6:

از تبدیل لاپلاس استفاده نموده و دستگاه معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = 1 - t \\ \frac{dx}{dt} - x + 2 \frac{dy}{dt} = 4e^t \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = y(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

مسئله 7:

ثابت کنید که

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \frac{\pi}{2}$$

... شما هرگز آن سرمایه و ثروت را ندارید که مردم را از تهیدستی و فشارهای زندگی برهاند پس خود را به سرمایه اخلاق مجهز کنید و با اخلاق خوب و روی گشاده
بار غمی را از دل دیگران بردارید....
موفق باشید.